Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications.

Par JACQUES DIXMIER à Paris.

Introduction.

La notion de moyenne invariante dans un groupe a été considérée par J. VON NEUMANN [13]. Cette question est exposée (pour les semi-groupes) au nº 1 de ce travail. Au nº 2, on donne des exemples de groupes sur lesquels *il n'existe pas de moyenne invariante*. Au nº 3, on envisage, avec ALAOGLU et BIRKHOFF [1], les moyennes de fonctions prenant leurs valeurs dans un espace de Banach.

Une application à la théorie ergodique est exposée au nº 6, d'après [1]. Une autre application, concernant les mesures invariantes dans un espace où opère un semi-groupe de transformations, est exposée au nº 7, d'après [13].

Si le semi-groupe considéré est le semi-groupe additif des nombres entiers $\geqq 0$, ou des nombres réels $\geqq 0$, on obtient la notion de limite généralisée (cf. BANACH [3]). En utilisant cette notion, BÉLA SZ.-NAGY a démontré [16] que tout opérateur V d'un espace de Hilbert, tel que $\|V^n\| \leqq K < +\infty$ pour $-\infty < n < +\infty$, est semblable à un opérateur unitaire, et que tout groupe à un paramètre d'opérateurs uniformément bornés est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires. Sa méthode s'étend immédiatement aux représentations des groupes sur lesquels existe une moyenne invariante. Cette application est exposée au nº 5 avec quelques conséquences pour des problèmes de géométrie hilbertienne. C'est d'ailleurs la lecture de [16] qui est à l'origine du présent mémoire.

On verra, par les détails donnés au début de chaque numéro, que ce mémoire contient beaucoup plus de résultats connus que de résultats nouveaux. Mais il est peut-être intéressant de les grouper. D'autre part, je pense avoir simplifié, à diverses reprises, les anciennes démonstrations.

Je remercie M. BÉLA SZ.-NAGY, qui, par de nombreux conseils, m'a permis d'améliorer grandement ce mémoire.

1. Moyennes invariantes dans les semi-groupes.

Dans ce n°, on définit et on étudie les moyennes invariantes pour un semi-groupe topologique. Le théorème 1 est nouveau. Le théorème 2 est dû (pour les groupes discrets) à J. VON NEUMANN ([13], pp. 79—80); la partie α) résulte aussi d'un théorème de MARKOV [12], démontré aussi par KAKUTANI [6] et KREIN [7]. La démonstration donnée ici est nouvelle.

Soit G un *semi-groupe topologique*, c'est-à-dire un espace topologique dans lequel une multiplication xy est définie qui est associative et continue par rapport à l'ensemble des facteurs x, y. Soit $C = C(G)$ l'espace de Banach des fonctions *réelles continues bornées* sur G, la norme de $f \in C$ étant $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$. (Si G est discret, C est l'ensemble des fonctions réelles bornées quelconques sur G.)

Une fonctionnelle linéaire φ sur C est dite *positive* lorsque $\varphi(f) \geqq 0$ pour $f(x) \geqq 0$. Une telle fonctionnelle est bornée, de norme $\varphi(1)$.

Une fonctionnelle linéaire positive φ telle que $\varphi(1) = 1$ s'appelle une *moyenne*. Elle est dite *invariante à gauche* si $\varphi({}_sf) = \varphi(f)$ pour chaque $s \in G$, ${}_sf(x)$ désignant la fonction $f(sx)$. Les moyennes *invariantes à droite*, et les moyennes invariantes à gauche et à droite (ou *invariantes* tout court) se définissent d'une manière analogue: $\varphi(f_s) = \varphi(f)$, resp. $\varphi({}_sf_{s'}) = \varphi(f)$, où $f_s(x) = f(xs)$ et ${}_sf_{s'}(x) = f(sxs')$.[1])

Lorsque G est un groupe, on voit immédiatement que, si $\varphi(f)$ est une moyenne invariante à gauche, alors $\psi(f) = \varphi(\tilde{f})$, où $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$, est une moyenne invariante à droite, et inversement.

G étant encore un groupe, si on restreint C à l'ensemble des fonctions presque-périodiques [14] ou plus généralement ergodiques [5], on sait qu'il existe toujours une moyenne invariante. Mais le fait de considérer l'ensemble de *toutes* les fonctions continues modifie essentiellement le problème, comme on le verra.

Théorème 1. *Pour que le semi-groupe G possède une moyenne invariante à gauche il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété*

---

[1]) Soit, dans le dual de l'espace de Banach C, Ω l'ensemble des fonctionnelles χ telles que $\chi(fg) = \chi(f)\chi(g)$, $\chi(1) = 1$; muni de sa topologie faible, Ω est le "spectre" de l'algèbre C; c'est un espace compact; on peut identifier canoniquement G à un sous-espace partout dense de Ω, et toute fonction de C est prolongeable de manière unique en une fonction continue sur Ω (si G est complètement régulier). Les translations de G sont prolongeables à Ω, de sorte que G peut être considéré comme opérant, soit à droite, soit à gauche, sur Ω. Le fait pour G de posséder une moyenne invariante à gauche, par exemple, signifie qu'il existe sur l'ensemble C Ω) des fonctions continues sur Ω une moyenne invariante à gauche par G. S'il en est ainsi, et si Ω' est un espace compact quelconque sur lequel G opère à gauche, il existe sur $C(\Omega')$ une moyenne invariante par G, d'après notre théorème 8. (Cette remarque m'a été suggérée par R. GODEMENT.)

(P_g): *Si* $f^1, f^2, \ldots, f^n$ *sont des éléments de* C, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *des éléments de* G, *et* a *un nombre réel, tels que* $f^1 - {}_{s_1}f^1 + f^2 - {}_{s_2}f^2 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geqq a$, *on* a: $a \leqq 0$.

Pour que G *possède une moyenne invariante, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété*

(P): *Si* $f^1, f^2, \ldots, f^n$ *sont des éléments de* C, $s_1, s_2, \ldots, s_n, s'_1, s'_2, \ldots, s'_n$ *des éléments de* G, *et* a *un nombre réel, tels que* $f^1 - {}_{s_1}f^1_{s'_1} + f^2 - {}_{s_2}f^2_{s'_2} + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n_{s'_n} \geqq a$, *on* a: $a \leqq 0$.

Démonstration. Lorsque G possède la moyenne invariante à gauche φ, alors il résulte de l'inégalité $f^1 - {}_{s_1}f^1 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geqq a$ que

$$a = a\varphi(1) = \varphi(a) \leqq \sum_{i=1}^{n} [\varphi(f^i) - \varphi({}_{s_i}f^i)] = 0,$$

donc G a la propriété (P_g).

Supposons inversement que G jouit de la propriété (P_g) Soit $E \subset C$ l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{n} (f^i - {}_{s_i}f^i)$; E est un sous-espace vectoriel de C. Soit $K \subset C$ l'ensemble des f tels que $\inf_{x \in G} f(x) > 0$. K est convexe et ouvert. La propriété (P_g) veut dire que $E \cap K$ est vide. D'après le théorème de Hahn-Banach tel qu'il est énoncé dans [4], il existe alors un hyperplan E' [2]), tel que $E' \supset E$, $E' \cap K = \Theta$. Soit ψ une fonctionnelle $\neq 0$ s'annulant sur E'. Le signe de ψ est constant sur K. Pour λ bien choisi, on a donc $\lambda\psi(1) = 1$, et $\lambda\psi(f) > 0$ pour $f \in K$, donc par continuité $\lambda\psi(f) \geqq 0$ pour $f \geqq 0$. Alors $\varphi = \lambda\psi$ est une moyenne, et φ s'annule sur E, ce qui prouve son invariance à gauche.

La proposition concernant la propriété (P) se démontre d'une manière analogue.

Théorème 2. α) *Tout semi-groupe abélien possède une moyenne invariante.*

β) *Tout groupe compact possède une moyenne invariante.*

γ) *Soit* H *un sous-semi groupe distingué de* G [3]). *Si* H, *considéré comme sous-semi-groupe topologique de* G, *possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante), et si* G/H, *considéré comme semi-groupe discret, possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante), alors* G *possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante).*

---

[2]) C'est-à-dire un sous-espace vectoriel de C tel que l'espace quotient C/E' soit de dimension 1.

[3]) Nous adopterons par exemple les définitions suivantes. Soit H un sous-semi-groupe de G. Etant donnés deux éléments x, y de G, nous écrirons $x \approx y$ s'il existe des éléments $x', y' \in H$ tels que $xx' = yy'$; nous écrirons $x \sim y$ s'il existe des éléments $s, t, \ldots, u$ de G tels que $x \approx s \approx t \approx \ldots \approx u \approx y$. On voit aisément que $x \sim y$ est une relation d'équi-

δ) Soit (H_α) une famille de sous-semi-groupes de G filtrante croissante par inclusion, et telle que $G = \bigcup_\alpha H_\alpha$. Si tous les H_α, considérés comme sous-semi-groupes topologiques de G, possèdent des moyennes invariantes à gauche (resp. invariantes), alors G possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante).

Démonstration. Supposons G abélien. Soient $f^1, f^2, \ldots, f^n$ des éléments de C, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des éléments de G, et a un nombre réel tels que $f^1 - {}_{s_1}f^1 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geqq a$. Pour tout entier $p \geqq 0$, désignons par A_p l'ensemble des éléments de G de la forme $s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \ldots s_n^{\lambda_n}$ où $1 \leqq \lambda_i \leqq p$ (λ_i entier). Si $\mu(A)$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble A, on a $\mu(A_p) \leqq p^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un p tel que $\mu(A_{p+1}) < (1+\varepsilon)\mu(A_p)$. (En effet, l'inégalité $\mu(A_{p+1}) \geqq (1+\varepsilon)\mu(A_p)$ pour tout p entrainerait $\mu(A_p) \geqq (1+\varepsilon)^{p-1}\mu(A_1)$, ce qui est contradictoire à $\mu(A_p) \leqq p^n$.) Si p est ainsi choisi, on a :

$$a\mu(A_p) \leqq \sum_{x \in A_p} [f^1(x) - {}_{s_1}f^1(x) + \ldots + f^n(x) - {}_{s_n}f^n(x)] =$$

$$= \sum_{x \in A_p} f^1(x) - \sum_{x \in s_1 A_p} f^1(x) + \ldots + \sum_{x \in A_p} f^n(x) - \sum_{x \in s_n A_p} f^n(x) \leqq$$

$$\leqq \sum_{x \in A_p - s_1 A_p} |f^1(x)| + \sum_{x \in s_1 A_p - A_p} |f^1(x)| + \ldots + \sum_{x \in A_p - s_n A_p} |f^n(x)| + \sum_{x \in s_n A_p - A_p} |f^n(x)|,$$

d'où, en désignant par M une borne supérieure commune des $|f^i(x)|$, en remarquant que $s_i A_p \subset A_{p+1}$, et que $\mu(s_i A_p - A_p) = \mu(A_p - s_i A_p)$, on obtient que $a\mu(A_p) \leqq 2nM\mu(A_{p+1} - A_p)$ ou $a \leqq 2nM\varepsilon$, et, comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, $a \leqq 0$; ceci, avec le théorème 1, prouve l'existence d'une moyenne invariante à gauche, donc invariante puisque G est abélien.

Si G est un groupe compact, l'intégrale de Haar est une moyenne invariante [15].

Prouvons maintenant γ) dans le cas des moyennes invariantes à gauche. Soit ψ (resp. ω) une moyenne invariante à gauche pour H (resp. G/H). Soit $f \in \mathcal{C}(G)$. Soient x', x'' deux éléments de G tels que $x' \approx x''$. On a : $x'y' = x''y''$, où y', y'' sont des éléments de H. Donc :

$$\psi({}_{x''}f) = \psi({}_{y''}({}_{x''}f)) = \psi({}_{x''y''}f) = \psi({}_{x'y'}f) = \psi({}_{y'}({}_{x'}f)) = \psi({}_{x'}f)$$

les fonctions considérées étant restreintes à H (et continues bornées sur H). Par suite, la relation $x' \sim x''$ entraîne aussi $\psi({}_{x''}f) = \psi({}_{x'}f)$. Nous pouvons donc poser : $\psi({}_{x'}f) = \bar{f}(x)$, où x est la classe de x' dans G/H, et $\bar{f}$ est une fonction bornée sur G/H. Posons enfin : $\omega(\bar{f}) = \varphi(f)$. La fonctionnelle φ est

---

valence, et nous appellerons classes à gauche (suivant H) les classes d'équivalence correspondantes. On définit de même les classes à droite. Si les classes à gauche et à droite coïncident, H sera dit *distingué*. Alors, on vérifie aussitôt que les relations $x \sim y$, $x_1 \sim y_1$ entrainent $xx_1 \sim yy_1$, de sorte que l'ensemble des classes d'équivalence forme un semi-groupe que nous noterons G/H. Si G est un groupe et H un sous-groupe, on retrouve les notions classiques de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

évidemment une moyenne. D'ailleurs, si $t' \in G$, et si $t \in G/H$ est la classe de t', on a:

$$\overline{{}_{t'}f}(x) = \psi({}_{x'}({}_{t'}f)) = \psi({}_{t'x'}f) = \bar{f}(tx) = {}_t\bar{f}(x),$$

donc $\omega(\overline{{}_{t'}f}) = \omega(\bar{f})$, $\varphi({}_{t'}f) = \varphi(f)$.

Prouvons δ) dans le cas des moyennes invariantes à gauche. Soient $f^1, f^2, \ldots, f^n$ des éléments de $C(G)$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des éléments de G, et a un nombre réel, tels que $f^1 - {}_{s_1}f^1 + \ldots + f^n - {}_{s_n}f^n \geq a$. Il existe un α tel que tous les s_i soient dans H_α. Alors, comme H_α vérifie (P_g) on a: $a \leq 0$. Donc G vérifie (P_g).

Le théorème 2 permet, sachant qu'il existe des moyennes invariantes sur certains semi-groupes, de conclure qu'il en existe aussi sur des semi-groupes "plus grands". Le théorème suivant joue un rôle inverse.

Théorème 3. α) *Si le semi-groupe G possède une moyenne invariante à gauche (resp. invariante), il en est de même pour tout semi-groupe quotient de G.*

β) *Soient G un groupe, G' un sous-groupe, $x \to x^*$ l'application continue de G dans l'espace homogène G/G' des classes à droite suivant G'. Supposons qu'il existe une application continue $y \to \tilde{y}$ de G/G' dans G telle que $\tilde{y} \in y$ (ce qui est toujours le cas si G est discret). Alors, si G possède une moyenne invariante à gauche, il en est de même de G'.*

Démonstration. Prouvons α) pour les moyennes invariantes à gauche. Soient φ une moyenne invariante à gauche sur G, H un sous-semi-groupe distingué de G. $F(x)$ étant une fonction continue bornée sur G/H, la fonction $f(x') = F(x)$ (où $x' \in G$, x étant la classe de x' suivant H) est continue bornée sur G (on suppose G/H muni d'une topologie telle que l'application $x' \to x$ de G sur G/H est continue). Posons: $\psi(F) = \varphi(f)$. On vérifie aussitôt que ψ est une moyenne invariante à gauche sur G/H.

Prouvons β). Soit F une fonction continue bornée sur G'. Définissons une fonction continue bornée f sur G en posant $f(x) = F(x\tilde{x}^{*-1})$. Puis, posons: $\psi(F) = \varphi(f)$, où φ est une moyenne invariante à gauche pour G. On vérifie aussitôt que ψ est une moyenne invariante à gauche pour G'.

2. Exemples de groupes sans moyennes invariantes.

Voici maintenant une classe étendue de groupes *ne possédant pas* de moyenne invariante à gauche. Le cas du groupe libre à deux générateurs est implicitement traité dans [13].

Théorème 4. *Si G est un groupe discret engendré par une famille d'éléments $(s_i)_{i\in I}$, avec des relations de la forme $s_i^{r_i} = e$*[4]) *(i parcourant un sous-ensemble J de I), G ne possède pas de moyenne invariante à gauche,*

[4]) e désigne l'élément neutre de G.

sauf si I ne contient qu'un élément, ou si, I contenant deux éléments, les relations sont de la forme $s_1^2=s_2^2=e$; dans ces deux cas particuliers, G possède une moyenne invariante.

Démonstration. Envisageons d'abord les cas particuliers du théorème. Si I contient un seul élément, G est abélien, donc possède une moyenne invariante (théorème 2). Si I contient deux éléments s_1, s_2, et si les relations sont de la forme $s_1^2=s_2^2=e$, les éléments de G peuvent être mis en tableau de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots s_2s_1s_2s_1s_2 & s_2s_1s_2 & s_2 & s_1 & s_1s_2s_1 & s_1s_2s_1s_2s_1\ldots \\ \ldots\ldots s_2s_1s_2s_1 & s_2s_1 & e & s_1s_2 & s_1s_2s_1s_2\ldots\ldots \end{array}$$

Les éléments de la deuxième ligne forment un sous-groupe distingué abélien et le groupe quotient correspondant est d'ordre 2, donc G possède une moyenne invariante (théorème 2).

Supposons maintenant G discret engendré par un famille $(s_i)_{i\in I}$ avec les relations $s_i^{r_i}=e$ pour $i\in J$, les deux cas précédents étant écartés. Tout $x\in G$, $x\neq e$, se représente canoniquement sous la forme $x=s_{i_1}^{\lambda_1}s_{i_2}^{\lambda_2}\ldots s_{i_n}^{\lambda_n}$, où $i_p\neq i_{p+1}$ et où λ_p est un entier quelconque $\neq 0$ si $i_p\in I-J$, et un entier de l'intervalle $[1, r_{i_p}-1]$ si $i_p\in J$. Posons alors: $s_{i_1}=s(x)$, $\lambda_1=\lambda(x)$. Soit C_i' l'ensemble des x tels que $s(x)\neq s_i$, et $C_i=C_i'\cup\{e\}$; $s_i^kC_i$ (où $k\neq 0$ si $i\in I-J$, et $k\in[1, r_i-1]$ si $i\in J$) est l'ensemble des x tels que $s(x)=s_i$, $\lambda(x)=k$. Si alors I comprend au moins trois éléments, soient s_1, s_2, s_3 trois distincts des s_i et considérons les ensembles:

$$A_1=C_1,\ A_2=C_2,\ A_3=C_3,\ B_1=s_1C_1,\ B_2=s_2C_2,\ B_3=s_3C_3.$$

Pour tout $x\in G$, le nombre d'ensembles A_i contenant x est strictement supérieur au nombre d'ensembles B_i contenant x. Les fonctions caractéristiques de ces ensembles mettent donc (P_g) en défaut. Supposons enfin que G est engendré par deux éléments s_1, s_2 avec éventuellement des relations $s_1^{r_1}=e$, $s_2^{r_2}=e$, mais par exemple $s_1^2\neq e$. Considérons les ensembles:

$$A_1=A_3=A_5=A_7=A_9=C_1,\quad A_2=A_4=A_6=A_8=C_2,$$
$$B_1=B_5=B_9=s_1C_1,\quad B_3=B_7=s_1^2C_1,\quad B_2=B_4=B_6=B_8=s_2C_2.$$

On a: $e\in A_1, A_2, \ldots, A_9$; $s_1\in A_2, A_4, A_6, A_8, B_1, B_5, B_9$;
$s_1^2\in A_2, A_4, A_6, A_8, B_3, B_7$; $s_2\in A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, B_2, B_4, B_6, B_8$.

Si $s(x)=s_1$, $\lambda(x)\neq 1, 2$, $x\in A_2, A_4, A_6, A_8$.
Si $s(x)=s_2$, $\lambda(x)\neq 1$, $x\in A_1, A_3, A_5, A_7, A_9$.

On voit encore que G n'a pas la propriété (P_g).

Le plus simple de ces groupes est le groupe engendré par deux éléments s_1, s_2, avec les relations $s_1^2=s_2^3=e$, c'est-à-dire le *groupe modulaire arithmétique.*

D'après [13], le groupe G_n des rotations autour d'un point dans l'espace euclidien à n dimensions contient un sous-groupe libre engendré par deux éléments, pour $n \geqq 3$. D'après les théorèmes 3 et 4, G_n, *considéré comme groupe discret*, ne possède pas de moyenne invariante à gauche pour $n \geqq 3$. Par contre, muni de sa topologie habituelle, G_n est compact donc possède une moyenne invariante.

3. Extension de la notion de moyenne invariante.

Le théorème 5 est dû essentiellement à ALAOGLU et BIRKHOFF [1].

Soient G un semi-groupe topologique, $\mathfrak{B}$ un espace de Banach réel, $\mathfrak{B}'$ son dual, $\mathfrak{B}''$ son bidual. Soit $C_{\mathfrak{B}} = C_{\mathfrak{B}}(G)$ (resp. $C_{\mathfrak{B}'} = C_{\mathfrak{B}'}(G)$) l'espace des fonctions $f(x)$, définies pour $x \in G$, *à valeurs dans* $\mathfrak{B}$ *(resp.* $\mathfrak{B}'$*), bornées en norme, et faiblement continues,* c'est-à-dire telles que, pour tout $g \in \mathfrak{B}'$ (resp. $\mathfrak{B}$), $(f(x), g)$ soit une fonction continue de x (à valeurs réelles). Avec la norme $\|f\| = \sup\limits_{x \in G} \|f(x)\|$, $C_{\mathfrak{B}}$ et $C_{\mathfrak{B}'}$ sont des espaces de Banach réels. Nous considérons aussi *des sous-espaces vectoriels* $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ *de* $C_{\mathfrak{B}}$ tels que, si $f \in \tilde{C}_{\mathfrak{B}}$, alors *a*) ${}_s f_{s'} \in \tilde{C}_{\mathfrak{B}}$; *b*) l'ensemble convexe fermé[5]) engendré dans $\mathfrak{B}$ par les valeurs de $f(x)$, $x \in G$, est *faiblement compact.*

Théorème 5. *Si G possède une moyenne invariante à gauche, il existe une application linéaire continue Φ de $C_{\mathfrak{B}'}$ (resp. $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$) dans $\mathfrak{B}'$ (resp. $\mathfrak{B}$), telle que α) $\Phi(f)$ appartient à l'ensemble convexe faiblement fermé engendré par les valeurs de $f(x)$, β) $\Phi({}_s f) = \Phi(f)$.*

Des faits analogues subsistent si G possède une moyenne invariante à droite ou une moyenne invariante à gauche et à droite.

Démonstration. Il suffit d'envisager le cas d'une mesure invariante à gauche φ. Prenons d'abord le cas de $\mathfrak{B}'$ et $C_{\mathfrak{B}'}$. Soit $f \in C_{\mathfrak{B}'}$. La fonction $(f(x), g)$ est, pour tout $g \in \mathfrak{B}$, une fonction de C. Le nombre $\varphi[(f(x), g)]$, est une fonctionnelle en g, qui est évidemment linéaire et bornée. Il existe donc un élément unique $\Phi(f)$ de $\mathfrak{B}'$ tel que:

$$(1) \qquad (\Phi(f), g) = \varphi[(f(x), g)]$$

et il est immédiat que Φ est linéaire et bornée. Prouvons α. D'après [8], il suffit de montrer que l'hypothèse $(f(x), g) \geqq \lambda$ pour $x \in G$ entraîne $(\Phi(f), g) \geqq \lambda$. Or, ceci résulte aussitôt de (1) et des propriétés de φ. Enfin on a

$$(\Phi({}_s f), g) = \varphi[\,{}_s f(x), g)] = \varphi[(f(x), g)] = (\Phi(f), g),$$

d'où $\Phi({}_s f) = \Phi(f)$. Si φ est invariante aussi à droite, il en est de même de Φ.

---

5) Rappelons que, dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$, les notions d'ensembles convexes (en particulier de sous-espaces vectoriels) fortement et faiblement fermés coïncident (cf. par exemple [2]); ici, et plusieurs fois dans la suite, il est donc inutile de préciser dans quel sens l'ensemble est fermé. Il n'en est pas de même dans le dual $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$, mais on a alors la propriété que les ensembles bornés faiblement fermés sont faiblement compacts (cf. par exemple [4]).

Faisons maintenant jouer à $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$ le rôle précédemment tenu par $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$. On voit qu'il existe une application linéaire continue Φ_1 de $C_{\mathfrak{B}''}$ dans $\mathfrak{B}''$ avec certaines propriétés. Soit Φ la restriction de Φ_1 à $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ (noter que $C_{\mathfrak{B}}$ donc $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ peut être identifié canoniquement à un sous-espace de $C_{\mathfrak{B}''}$). Φ est une application linéaire continue de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{B}''$, avec la propriété β) du théorème. Si $f \in \tilde{C}_{\mathfrak{B}}$, $\Phi(f) = \Phi_1(f)$ appartient, on l'a vu, à l'ensemble convexe faiblement fermé engendré dans $\mathfrak{B}''$ par les valeurs de $f(x)$. Mais, d'après la définition de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$, cet ensemble est contenu dans $\mathfrak{B}$. Ainsi, Φ est une application de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{B}$ avec la propriété α) du théorème.

Si $\mathfrak{B}$ est *réflexif*, $\mathfrak{B}$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{B}''$, de sorte qu'on peut prendre $\tilde{C}_{\mathfrak{B}} = C_{\mathfrak{B}}$.

4. Remarques diverses.

1. Au lieu de prendre pour C, au n° 1, l'espace des fonctions *réelles* continues bornées, on pourrait prendre l'espace des fonctions *complexes* continues bornées. La propriété (P_g) (par exemple) entraîne l'existence sur cet espace d'une fonctionnelle φ^c ayant des propriétés identiques à celles de φ, avec de plus $\varphi^c(\bar{f}) = \overline{\varphi^c(f)}$. De même, on peut, au n° 3, remplacer les espaces de Banach réels par des espaces de Banach complexes, en considérant l'espace de Banach réel sous-jacent à un espace de Banach complexe.

2. On peut aussi prendre pour C l'ensemble de *toutes les fonctions bornées* sur G, avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$. Mais ceci revient simplement à considérer G comme discret (c'est-à-dire sans topologie), et on retombe donc sur un cas particulier du cas étudié. Par exemple, si G est un semi-groupe abélien (éventuellement muni d'une topologie quelconque, mais ceci n'a aucune importance) il existe pour l'ensemble des fonctions bornées une moyenne invariante.

3. Si G est un groupe localement compact, on peut considérer l'espace des *fonctions réelles mesurables* (pour la mesure de Haar μ invariante à gauche) bornées, avec la norme $\|f\| = \operatorname{ess.\,sup.}_{x \in G} |f(x)|$. Le théorème 1 s'étend immédiatement (en remplaçant (P_g) par une propriété (P_g') dont l'énoncé est évident) et on obtient sans peine les résultats suivants, que nous énonçons sans démonstration :

a) G jouit de la propriété (P_g') si et seulement si G possède la propriété suivante : $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ étant des parties mesurables de G, A_i et B_i se déduisant l'un de l'autre par une translation à gauche (dépendant de i), le nombre d'ensembles B_i contenant un $x \in G$ est au moins égal au nombre d'ensembles A_i contenant x pour tous les x d'un ensemble de mesure > 0.

b) Pour que G possède la propriété (P'_g), la condition suivante est suffisante: pour tout système fini d'éléments de G, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie A de G, mesurable et de mesure finie >0, telle que $\mu(s_i A - A) \leqq \varepsilon \mu(A)$ pour $1 \leqq i \leqq n$ (cette propriété est vérifiée si G possède un sous-groupe compact H tel que G/H soit abélien).

Quand (P'_g) est vérifiée, la fonctionnelle φ prend la même valeur pour deux fonctions égales presque-partout, ce qui précise un peu les propriétés connues des limites généralisées dans le cas du groupe des nombres réels par exemple (mais φ n'existe alors que pour les fonctions mesurables).

5. Applications aux représentations des groupes.

Théorème 6. *Si le groupe G possède une moyenne invariante à droite φ, toute représentation fortement continue et bornée de G dans un espace de Hilbert est semblable à une représentation unitaire.*

Démonstration. Elle est calquée sur celle de Sz.-Nagy [16].

Une représentation fortement continue et bornée de G dans un espace de Hilbert H, par exemple complexe, est une application $s \to V_s$ de G dans l'ensemble des applications linéaires bicontinues de H sur H, telle que: α) $V_{st^{-1}} = V_s V_t^{-1}$, β) $K = \sup_{s \in G} \|V_s\| < +\infty$, γ) $V_s f$ dépend continûment de s (pour la topologie forte de H), quel que soit $f \in H$.

Pour $f \in H$, $g \in H$, posons $(f, g)_1 = \varphi[(V_s f, V_s g)]$.

Il est immédiat que $(f, g)_1$ dépend linéairement de f, et que $(f, g)_1 = \overline{(g, f)}_1$. On a de plus:

$$K^{-2}\|f\|^2 \leqq \inf_{s \in G} \|V_s f\|^2 \leqq \varphi(\|V_s f\|^2) = (f, f)_1 \leqq \sup_{s \in G} \|V_s f\|^2 \leqq K^2 \|f\|^2,$$

donc il existe, comme on sait, un opérateur self-adjoint bicontinu A de H tel que:

$$\varphi[(V_s f, V_s g)] = (f, g)_1 = (Af, Ag),$$

d'où:

$$\|A V_{s_0} A^{-1} f\|^2 = \varphi(\|V_s V_{s_0} A^{-1} f\|^2) = \varphi(\|V_s A^{-1} f\|^2) = \|f\|^2,$$

quel que soit $f \in H$, ce qui prouve que $A V_{s_0} A^{-1}$ est unitaire.

Problèmes. Est-ce que toute représentation bornée d'un groupe quelconque dans H est semblable à une représentation unitaire? Est-ce que, au contraire, cette propriété équivalente à l'existence d'une moyenne invariante à droite?

On pourrait déjà étudier cette question pour le groupe modulaire arithmétique qui, on l'a vu, ne possède pas la propriété (P_g).

Remarquons à ce sujet que toute représentation bornée d'un groupe G dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$ est semblable à une représentation par des opérateurs isométriques dans un autre espace de Banach $\mathfrak{C}$. En effet

$\|x\|_1 = \sup \|V_s x\|$ est une norme sur $\mathfrak{B}$ équivalente à $\|x\|$, et définit donc un espace de Banach $\mathfrak{C}$ avec une application biunivoque et bicontinue de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{C}$. Les V_s sont évidemment isométriques dans $\mathfrak{C}$.

Cas particuliers:

a) Soit V une application linéaire biunivoque et bicontinue de H sur H, telle que $\sup_{-\infty<n<+\infty} \|V^n\| < +\infty$. L'application $n \to V^n$ constitue une représentation bornée du groupe abélien discret des entiers rationnels. Donc V est semblable à un opérateur unitaire.

De même, si V_s $(-\infty < s < +\infty)$ est un groupe à un paramètre d'applications linéaires biunivoques et bicontinues de H sur H uniformément bornées, ce groupe est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires.

Ces deux applications sont celles que SZ.-NAGY avait en vue dans [16]. La première notamment met en évidence la structure des opérateurs considérés par LORCH [9], dans le cas d'un espace de Hilbert. Dans le cas des espaces de Banach quelconques, une de nos remarques antérieures prouve qu'un opérateur V tel que $\sup_{-\infty<n<+\infty} \|V^n\| < +\infty$ est semblable à un opérateur isométrique (mais ceci ne donne aucun renseignement sur la structure de ces opérateurs). Remarquons enfin que si $s \to V_s$ est une représentation bornée d'un groupe quelconque dans un espace de Hilbert, chaque opérateur de la représentation est semblable à un opérateur unitaire, puisque les opérateurs $V_s^n = V_{s^n}$ sont uniformément bornés.

b) Soit S un opérateur biunivoque et bicontinu de H tel que $S^2 = 1$. S est une "symétrie oblique", c'est-à-dire qu'il existe deux variétés linéaires fermées V, W, avec $V \cap W = 0$, $V + W = H$, $Sx = x$ pour $x \in V$, $Sx = -x$ pour $x \in W$. S est unitaire si et seulement si V et W sont orthogonales. Soit S' une autre symétrie oblique, V' et W' les variétés correspondantes. Supposons que les produits $(SS')^n$ $(-\infty < n < +\infty)$ sont uniformément bornés; il en est alors de même des opérateurs du groupe engendré par S et S'. Ce groupe constitue alors une représentation bornée d'un des groupes exceptionnels du théorème 4. Donc ce groupe est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires; autrement dit, il existe une application linéaire L biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $L(V)$ et $L(W)$ d'une part, $L(V')$ et $L(W')$ d'autre part, soient complètement orthogonales.

c) Soit I un ensemble abstrait. Soit $\mathfrak{P}$ un ensemble de parties de I contenant la partie vide Θ et la partie pleine I, tel que, si ω et ω' appartiennent à $\mathfrak{P}$, il en est de même de $\omega \cap \omega$, $\omega \cup \omega'$, $\omega - \omega'$.

Soit, dans H, une famille $\{E_\omega\}$ d'opérateurs *bornés idempotents* $(E_\omega^2 = E_\omega)$ définis pour $\omega \in \mathfrak{P}$. Faisons sur cette famille les hypothèses suivantes:

$$E_{\omega_1} \cdot E_{\omega_2} = E_{\omega_1 \cap \omega_2}, \quad E_{\omega_1} + E_{\omega_2} = E_{\omega_1 \cup \omega_2} \text{ si } \omega_1 \cap \omega_2 = \Theta, \quad E_\Theta = 0, \quad E_I = 1,$$
$$\sup \|E_\omega\| < +\infty \quad (\omega \in P).$$

Alors il existe une famille de projecteurs semblable à la famille d'opérateurs donnés. En effet, considérons les opérateurs $2E_\omega - 1$ $(\omega \in \mathfrak{F})$. Ils sont uniformément bornés, et on a:

$$(2E_\omega - 1)^2 = 1 \text{ et } (2E_\omega - 1)(2E_{\omega'} - 1) = 2E_{\omega''} - 1$$

où $\omega'' = \omega \cap \omega' + (I - \omega) \cap (I - \omega')$; donc ils forment un groupe abélien. Il existe alors une application A linéaire biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $A(2E_\omega - 1)A^{-1}$ soit unitaire, donc une symétrie. Alors, $AE_\omega A^{-1}$ est un projecteur (orthogonal).

On voit ainsi que certaines familles d'idempotents mises par LORCH [10] à la base d'un "calcul opérationnel" dans les espaces de Banach réflexifs, et appelées par lui *lattices bornées,* se ramènent aux classiques décompositions de l'unité dans le cas de l'espace de Hilbert.

d) Soit dans H une famille de vecteurs $(\varphi_i)_{i \in I}$ telle que 1) $0 < \inf_{i \in I} \|\varphi_i\| \leq \leq \sup_{i \in I} \|\varphi_i\| < +\infty$, 2) si J et J' sont deux parties complémentaires de I, l'une ou l'autre *finie,* on a pour les variétés linéaires fermées V_J et $V_{J'}$ sous-tendue respectivement par les $(\varphi_i)_{i \in J}$ et les $(\varphi_i)_{i \in J'}$: $V_J + V_{J'} = H$, $V_J \cap V_{J'} = 0$, et les projecteurs correspondants E_J ($E_J x = 0$ pour $x \in V_{J'}$, $E_J x = x$ pour $x \in V_J$) et $E_{J'} = I - E_J$ sont uniformément bornés.

Alors, $(\psi_i)_{i \in I}$ étant un système orthonormal complet[6]), il existe une application linéaire A biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $A\varphi_i = \psi_i$ pour $i \in I$.

Ce résultat, ainsi que d'autres analogues, sont dus encore à LORCH [11]. Pour le démontrer prenons pour $\mathfrak{F}$ la famille des sous-ensembles de I qui sont finis ou de complémentaires finis. On voit aussitôt qu'on est dans les conditions d'application de la démonstration précédente. Donc il existe une application A_1 linéaire biunivoque et bicontinue de H sur H telle que $A_1(V_J)$ et $A_1(V_{J'})$ soient complètement orthogonales pour J et J' complémentaires, $J \in \mathfrak{F}, J' \in \mathfrak{F}$. Alors, les $\varphi_i' = A_1(\varphi_i)$ forment un système *orthogonal* complet, et $\|A_1^{-1}\|^{-1} \inf \|\varphi_i\| \leq \|\varphi_i'\| \leq \|A_1\| \sup \|\varphi_i\|$, de sorte que, par $A_2\varphi_i' = \psi_i$, on définit un opérateur biunivoque et bicontinu. On n'a qu'à poser $A = A_2 A_1$.

6. Application à la théorie ergodique.

Cette application est due à ALAOGLU et BIRKHOFF [1].

Théorème 7. *Soit G un semi-groupe possédant une moyenne invariante à droite et une moyenne invariante à gauche. Soit V_s une représentation bornée faiblement continue*[7]) *de G dans un espace de Banach réel $\mathfrak{B}$. Soit $\mathfrak{B}_0$ le*

---

[6]) Il est facile de voir, à partir de la propriété 2, que la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ a même puissance que tout système orthonormal complet.

[7]) C'est-à-dire que $(V_s f, g)$ est une fonction réelle continue de s pour tout $f \in \mathfrak{B}$ et tout $g \in \mathfrak{B}'$.

sous-espace vectoriel fermé des $x \in \mathfrak{B}$ tels que $V_s x = x$ pour tout $s \in G$; et $\mathfrak{B}_1$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par les éléments de la forme $V_s x - x$ où $x \in \mathfrak{B}$ et $s \in G$. Si, pour tout $x \in \mathfrak{B}$, l'ensemble convexe fermé engendré par les $V_s x$ est faiblement compact (ce qui est toujours le cas si $\mathfrak{B}$ est réflexif), on a:

a) $\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1 = 0$ *et* $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$, *de sorte que* $\mathfrak{B}_0$ *et* $\mathfrak{B}_1$ *définissent un opérateur T idempotent, projection de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{B}_0$,*

b) *pour tout $x \in \mathfrak{B}$, l'ensemble convexe fermé engendré par les $V_s x$ a un seul point dans $\mathfrak{B}_0$ qui n'est autre que Tx.*

Démonstration 1. Soit φ une moyenne invariante à gauche sur G. Adoptant les notations du n° 3, nous prenons pour espace $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ l'espace des fonctions $V_s x$ où x est un élément fixe, arbitraire, de $\mathfrak{B}$, et nous obtenons une application Φ de $\tilde{C}_{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{B}$ avec les propriétés du théorème 5. On définit par $x \to \Phi(V_s x)$ une application linéaire continue T de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$. Si $x \in \mathfrak{B}_0$, $V_s x = x$ pour tout s, on a $Tx = x$. Si x est quelconque dans $\mathfrak{B}$, et y dans $\mathfrak{B}'$ (le dual de $\mathfrak{B}$), on a:

$$(V_{s_0} Tx, y) = (Tx, V_{s_0}^* y) = \varphi[(V_s x, V_{s_0}^* y)] = \varphi[(V_{s_0 s} x, y)] = \varphi[(V_s x, y)] = (Tx, y),$$

donc $V_{s_0} Tx = Tx$, et par suite $Tx \in \mathfrak{B}_0$. Donc T est un *idempotent*, et est une projection de $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{B}_0$. Soit $\mathfrak{B}_1$ le sous-espace vectoriel fermé des $x \in \mathfrak{B}$ tels que $Tx = 0$. Évidemment, $\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1 = 0$, $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$.

2. D'après le théorème 5, Tx appartient à l'ensemble convexe fortement fermé K_x engendré par les $V_s x$.

3. Soit φ' une moyenne invariante à droite sur G Opérant avec φ' comme avec φ, on définit une application linéaire continue T' de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$, telle que $T'x = x$ pour $x \in \mathfrak{B}_0$, et telle que, pour $x \in \mathfrak{B}$, $y \in \mathfrak{B}'$:

$$(T' V_{s_0} x, y) = \varphi'[(V_s V_{s_0} x, y)] = \varphi'[(V_s x, y)] = (T' x, y)$$

d'où $T' V_{s_0} x = T' x$, et par suite $T' z = T' x$ pour tout $z \in K_x$; en particulier, $T'(Tx) = T' x$. Comme $Tx \in \mathfrak{B}_0$, il en vient que $Tx = T' x$, $T = T'$. On a par conséquent: $T V_s = T$.

4. Si $x \in \mathfrak{B}_1$, on a: $T V_s x = Tx = 0$, donc $V_s x \in \mathfrak{B}_1$. Donc $K_x \subset \mathfrak{B}_1$. Si maintenant x est quelconque, on a $x - Tx \in \mathfrak{B}_1$, donc $K_{x - Tx} \subset \mathfrak{B}_1$. Or:

$$K_x = K_{(x - Tx) + Tx} = Tx + K_{x - Tx} \subset Tx + \mathfrak{B}_1,$$

donc Tx est bien le point *unique* où K_x rencontre $\mathfrak{B}_0$.

5. Si x est quelconque, on vient de voir que $T V_s x = Tx$, $T(x - V_s x) = 0$, d'où $x - V_s x \in \mathfrak{B}_1$. Réciproquement, soit $z \in \mathfrak{B}_1$. D'après ce qui précède, $K_z \cap \mathfrak{B}_0 = \{0\}$, donc il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, des nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de G, tels que: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_{s_i} z \right\| \leq \varepsilon$. D'où:

$$z = z - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_{s_i} z + z_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) z - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_{s_i} z + z_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z - V_{s_i} z) + z_1$$

avec $\|z_1\| \leqq \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\mathfrak{B}_1$ est le sous-espace vectoriel *fermé* engendré par les $x - V_s x$.

7. Applications à la théorie des mesures invariantes.

Le théorème 8 (ainsi que l'exemple a)) sont dûs, à la forme près, à J. v. NEUMANN [13]; la démonstration donnée ici est légèrement simplifiée. Le lemme est peut-être nouveau.

Soit S un ensemble abstrait, G *un semi-groupe discret de transformations de* S; si $x \in S$ et $s \in G$, on notera sx le transformé de x par s, et on suppose: $(st)x = s(tx)$. Soit E l'ensemble des fonctions réelles bornées sur S. E est un espace vectoriel réel. Si $f \in E$, on définit ${}_sf$ par ${}_sf(x) = f(sx)$. Une fonctionnelle linéaire ψ sur *un sous-espace vectoriel de E invariant par G* sera dite positive si $\psi(f) \geqq 0$ pour $f(x) \geqq 0$, et invariante si $\psi({}_sf) = \psi(f)$.

Théorème 8. *Supposons que G possède une moyenne invariante à gauche φ. Il existe sur E une fonctionnelle χ linéaire positive invariante telle que $\chi(1) = 1$.*

Plus généralement, soit $g \in E$ une fonction $\geqq 0$. Soit $E' \subset E$ le sous-espace vectoriel engendré par les ${}_sg$, et E'' le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $\geqq 0$ majorées par des fonctions de E' ($E' \subset E'' \subset E$). S'il existe sur E' une fonctionnelle linéaire $\psi \neq 0$, positive, invariante par G[8]*) il existe sur E'' une fonctionnelle linéaire χ positive, invariante par G, telle que $\chi(g) = 1$.*

Démonstration. Envisageons tout de suite le cas général. D'après un lemme sur lequel nous reviendrons dans un instant, il existe une fonctionnelle linéaire ω sur E'', positive, coïncidant à un facteur près $\neq 0$ avec ψ sur E'. On peut donc supposer $\omega({}_sg) = 1$ pour tout $s \in G$. Maintenant, pour $f \in E''$, posons: $\chi(f) = \varphi[\omega({}_sf)]$, où $\omega({}_sf)$ est considérée comme une fonction de s, bornée comme on le voit aisément d'après la définition de E''. Il est immédiat que χ vérifie les conditions du théorème.

Le lemme sur lequel nous nous sommes appuyés, et qui présente un intérêt propre, est le suivant (pour l'appliquer à la démonstration précédente, il faut y remplacer E par E'').

Lemme. *Soient E un espace vectoriel réel, $E' \subset E$ un sous-espace vectoriel, H' un hyperplan de E', $K \subset E$ un ensemble convexe tel que $K \cap E'$ ne traverse pas H'*[9]*). Supposons de plus que, pour tout $y \in E$, il existe un $x \in E'$ tel que $x + \lambda y \in K$ pour $|\lambda|$ assez petit*[10]*). Alors il existe un hyperplan H de E tel que K ne traverse pas H, et tel que $H \cap E' = H'$.*

---

[8]) Cette condition est évidemment vérifiée si $g = 1$.

[9]) Autrement dit, si $\mu \neq 0$ est une fonctionnelle linéaire sur E' s'annulant sur H', on a $\mu(x)\mu(y) \geqq 0$ si x et y sont deux points quelconques de $K \cap E'$.

[10]) Si cette condition est omise, le lemme peut être mis en défaut. Notons que cette condition est certainement remplie si K possède dans E' un point *interne* (x est

Démonstration. Soit M l'ensemble des couples (E^*, H^*), où E^* est un sous-espace vectoriel de E et H^* un hyperplan de E^*, tels que $K \cap E^*$ ne traverse pas H^*, et tels que $E^* \supset E'$, $H^* \cap E' = H'$. On ordonne cet ensemble, la relation d'ordre entre deux couples (E_1, H_1) et (E_2, H_2) étant définie par $E_1 \subset E_2$, $H_1 \subset H_2$. Il est facile de voir que tout sous-ensemble totalement ordonné de M admet une borne supérieure. Soit donc (E_0, H_0) un couple *maximal*. Il suffit de prouver que $E_0 = E$ (H_0 sera alors le H du lemme). Si $E_0 \neq E$, soit $E_0' \supset E_0$ un sous-espace vectoriel tel que E_0'/E_0 soit de dimension 1. Soit $K_0 = E_0' \cap K$. *Si on raisonne modulo* H_0, l'image de E_0' est un plan, l'image de E_0 est une droite d passant par l'origine 0, et l'image de K_0 est un ensemble convexe k dont l'intersection avec d *ne traverse pas* 0; de plus, d'après la condition du lemme, l'image modulo H_0 d'un certain point de E' (image qui $\in d$) est centre d'un segment situé dans k *et non porté par* d. Alors, on construit aisément une droite δ, distincte de d, passant par 0, ne traversant pas k. Soit H_0' l'ensemble des classes modulo H_0 des points de δ. (E_0', H_0') constitue un couple de M, ce qui est absurde puisque (E_0, H_0) est maximal.

Exemples. a) Prenons pour S l'espace euclidien à deux dimensions, pour G le groupe des déplacements, pour g la fonction caractéristique d'un carré de côté 1. G possède une moyenne invariante d'après le théorème 2: en effet, si G_1 est le sous-groupe distingué des translations, G_1 et G/G_1 sont abéliens. De même, g vérifie la condition du théorème: il suffit de prendre pour ψ l'intégrale ordinaire des fonctions de E'. E'' est l'ensemble des fonctions bornées nulles en dehors d'un ensemble borné. Il existe donc sur E'' une fonctionnelle linéaire positive, invariante par déplacement, égale à 1 pour g. En particulier, on peut attacher à tout ensemble borné une mesure ≥ 0, $< +\infty$, qui possède l'additivité restreinte, et invariante par déplacement. En attribuant la mesure $+\infty$ aux ensembles non bornés, on obtient une mesure définie pour tous les ensembles, ayant les mêmes propriétés, et égale à 1 pour le carré de côté 1 (cf. [13]).

b) Prenons pour S l'espace euclidien à deux dimensions, pour G le groupe des similitudes. G possède une moyenne invariante, car, si G_1 est le

interne pour K si, quel que soit $y \in E$, $x + \lambda y \in K$ pour $|\lambda|$ assez petit; par exemple, un point intérieur de K, si E est topologique, est interne). Dans ce cas particulier, on peut déduire le lemme du théorème de Hahn-Banach énoncé sous la forme: Si tous les points de K', ensemble convexe, sont internes, et si un sous-espace vectoriel est disjoint de K', il existe un hyperplan plus grand disjoint de K' (on considère l'ensemble des points internes de K). Mais le lemme sous sa forme générale (indispensable ici) ne peut se déduire du théorème de Hahn-Banach. Au contraire, le théorème de Hahn-Banach se déduit immédiatement du lemme. Le lemme est donc une généralisation de ce théorème, qui me paraît devoir être utile dans divers cas.

sous-groupe distingué des translations, G_1 et G/G_1 sont abéliens. On peut donc définir pour tous les ensembles une mesure, qui possède l'additivité restreinte, invariante par similitude, égale à 1 pour tout le plan (donc à 0 pour les ensembles bornés).

Remarque (communiquée à l'auteur par R. GODEMENT): Soit G un groupe fuchsien, réalisé comme groupe discret d'automorphismes du disque $|z| \leqq 1$; soit S la circonférence $|z|=1$. Sauf dans des cas exceptionnels, on peut montrer qu'il n'existe aucune mesure de Radon $\neq 0$ sur S invariante par G. Il n'existe donc pas de mesure invariante à gauche sur G (théorème 8). Les cas exceptionnels se ramènent, par représentation conforme, aux suivants: 1) G sous-groupe du groupe des similitudes. 2) G engendré par les substitutions $z \to az$ $(a>0)$ et $z \to bz^{-1}$ $(b<0)$. 3) G fini. (Dans ces trois cas, il existe une moyenne invariante sur G: théorèmes 2 et 3.)

Bibliographie.

[1] L. ALAOGLU et G. BIRKHOFF, General ergodic theorems, *Proceedings National Academy of Sciences U. S. A.*, **25** (1939), p. 628–630.

[2] G. ASCOLI, Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, *Annali Mat. pura appl.*, **10** (1932), p. 33—81.

[3] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires* (Varsovie, 1932).

[4] J. DIEUDONNÉ, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **59** (1942), p. 107–139.

[5] R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Transactions American Math. Society*, **63** (1948), p. 1–84.

[6] S. KAKUTANI, Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets, *Proceedings Imperial Acad. Tokyo*, **14** (1938), p. 242—245.

[7] M. KREIN, Opérations linéaires transformant un certain ensemble conique en lui-même, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, (N. S.) **23** (1939), p. 749—752.

[8] M. KREIN et V. SMULIAN, On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, *Annals of Math.*, **41** (1940), p. 556–583.

[9] E. R. LORCH, The integral representation of weakly almost periodic transformations in reflexive vector spaces, *Transactions American Math. Society*, **49** (1941), p. 18—40.

[10] E. R. LORCH, On a calculus of operators in reflexive vector spaces, *ibidem*, **45** (1939), p. 217–234.

[11] E. R. LORCH, Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces, *Bulletin American Math. Society*, **45** (1939), p. 564—569.

[12] A. MARKOV, Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, (N. S.) **1** (1936), p. 311—313.

[13] J. VON NEUMANN, Zur allgemeinen Theorie des Maßes, *Fundamenta Math.*, **13** (1929), p. 73–116.

[14] J. VON NEUMANN, Almost periodic functions in a group, *Transactions American Math. Society*, **36** (1934), p. 445—492.

[15] J. VON NEUMANN, Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen, *Compositio Math.*, **1** (1934), p. 106—114.

[16] B. SZ.-NAGY, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *ces Acta*, **11** (1947), p. 152–157.

(Reçu le 2 août 1949)